Estructura de Materia 1
Curso de Verano 2012

Práctica 6
Inestabilidades hidrodinámicas

Problema 1. Inestabilidades de Kelvin-Helmholtz & de Rayleigh-Taylor

En este problema consideraremos la inestabilidad que se genera en la interfaz entre dos flujos horizontales paralelos de velocidad y densidad diferentes, sometidos a un campo gravitatorio de aceleración g en dirección perpendicular a dicha interfaz.

A los efectos de estudiar la estabilidad de este flujo en forma general, suponga que ambas capas tienen una profundidad infinita y que la interfaz entre ambos fluidos (considerados no miscibles) tiene un espesor infinitesimal. El estado de equilibrio se caracteriza por una velocidad U_1 y densidad ρ_1 en la capa superior; U_2 y ρ_2 en la capa inferior.

(i) Considere una pequeña perturbación a este estado de equilibrio. Esta perturbación puede introducirse en términos de la función potencial, en la forma:

$$\tilde{\phi}_1 = U_1 x + \phi_1$$
$$\tilde{\phi}_2 = U_2 x + \phi_2$$

donde los subíndices identifican la región a la que corresponde el potencial; $U_1 x$ identifica el potencial correspondiente al estado de equilibrio en la región 1 (superior), y ϕ_1 denota la perturbación introducida en dicha zona. Por qué es posible escribir la perturbación a través de una función potencial? Qué ventajas tiene una formulación en estos términos? Por otro lado, qué condiciones debe cumplir la perturbación introducida?

(ii) Condición cinemática en la interfaz. La condición de contorno cinemática sobre la interfaz, de ecuación $z = \zeta(y, t)$, resulta de observar que las partículas de fluido en la interfaz deben moverse con ella. Escriba esta condición en términos de los valores de los parámetros en cada región, recordando que estamos interesados en el análisis de estabilidad *lineal*.

(iii) Condición dinámica en la interfaz. La condición dinámica sobre la interfaz corresponde a la continuidad de la presión a través de la misma. Obtenga la condición dinámica en términos de los parámetros de cada región, recordando que estamos interesados en el analálisis de estabilidad *lineal*.

(iv) Considere entonces perturbaciones de la forma de modos normales:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\zeta} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{ik(x-ct)},$$

donde k es real (y puede tomarse positivo sin pérdida de generalidad), pero $c = c_R + i\,c_I$, es complejo. Por qué es posible analizar la respuesta del sistema a 'modos normales'? Cómo responderá el sistema a una perturbación pequeña pero no necesariamente *monocromática*?

(v) Resuelva el sistema de ecuaciones resultante y muestre que las soluciones para c vienen dadas por:

$$c = \frac{\rho_2 U_2 + \rho_1 U_1}{\rho_2 + \rho_1} \pm \sqrt{\frac{g}{k}\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} - \rho_1\rho_2 \left(\frac{U_1 - U_2}{\rho_2 + \rho_1}\right)^2}$$

Bajo qué condición hay soluciones estables? Para las soluciones estables, calcule la relación de dispersión de ondas dada por $\omega(k) = k\,c(k)$. Qué condición da lugar a una inestabilidad?

(vi) Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Suponga que ambas capas de fluido tienen la misma densidad, o bien que los efectos de la gravedad resultan despreciables, y considere $U_1 \neq U_2$. Interprete sus resultados en este caso particular.

(vii) Inestabilidad de Rayleigh-Taylor. Considere nuevamente el problema original y suponga ahora que $U_1 = U_2$ (pero $\rho_1 \neq \rho_2$). Cuándo es, el sistema resultante, estable ante perturbaciones? Interprete.

(viii) Efectos de la tensión interfacial. Volviendo al problema general (con $\rho_1 \neq \rho_2$ y $U_1 \neq U_2$), cómo cambian estos resultados si no se desprecia el mecanismo de tensión superficial presente en la interfaz entre ambos fluidos? Tenga en cuenta que en presencia de tensión interfacial, la condición dinámica sobre la interfaz resulta:

$$p_1 - p_2 = \sigma\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2},$$

siendo σ el coeficiente de tensión superficial entre ambos fluidos.

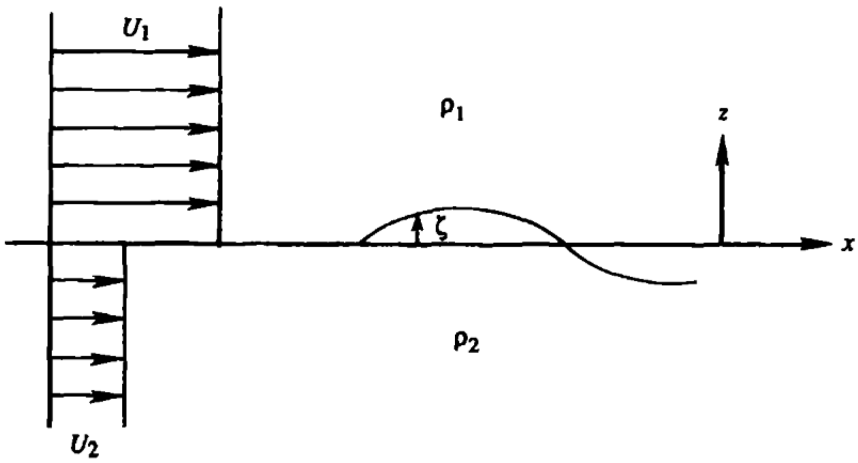

Figura 1: Esquema asociado al Problema 1.

Problema 2.

Considere el flujo general de un fluido incompresible plano de viscosidad cinemática ν, en ausencia de fuerzas externas; tal que el campo de velocidades resulta $\boldsymbol{u} \perp \hat{\mathbf{z}}\,\forall(x, y, t)$. Mostrar que si se considera la componente $\hat{\mathbf{z}}$ del rotor de la ecuación de Navier-Stokes, se llega a la siguiente ecuación para la evolución temporal de la vorticidad:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = [\psi, \omega] + \nu \nabla^2 \omega,$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\hat{\mathbf{z}} = -\nabla^2 \psi\,\hat{\mathbf{z}}$, y

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x},$$

denota el corchete de Poisson clásico.

Problema 3. Inestabilidad ideal de flujos paralelos

Considere un fluido ideal incompresible con densidad uniforme ρ_0, y con un campo de velocidades bidimensional (de equilibrio) dado por $\mathbf{u} = U(y)\,\hat{\mathbf{x}}$.

(i) Derivación de la ecuación de Rayleigh.

a) Considere un campo de velocidades ligeramente perturbado mediante una perturbación lineal de la forma

$$\psi(x, y, t) = \psi_0(y) + \delta\psi(x, y, t).$$

Muestre que la evolución temporal de la perturbación introducida a la vorticidad ($\delta\omega$), puede escribirse, a primer orden, como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\omega) = [\delta\psi, \omega_0] + [\psi_0, \delta\omega].$$

b) Proponga ahora perturbaciones de la forma

$$\delta\psi(x, y, t) = \Phi(y)\, \exp\{i\,[kx - 2\pi f(k)\,t]\}$$

y verifique que el coeficiente de la perturbación, $\Phi(y)$, satisface

$$\Phi''(y) + \left(\frac{k\,U''(y)}{2\pi f(k) - k\,U(y)} - k^2\right)\,\Phi(y) = 0,$$

Esta última expresión se denomina ecuación de Rayleigh.

(ii) Analice la estabilidad de los siguientes flujos resolviendo la ecuación de Rayleigh en cada tramo y pidiendo continuidad de la presión y de la velocidad perpendicular a las interfaces. Para cada uno de estos perfiles de velocidad, calcule también el valor k_{min} correspondiente a la longitud de onda de perturbación más inestable (i.e., de mayor tasa de crecimiento).

a) Flujo de cizallamiento discontínuo:

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 1, & \text{si } y > 0 \\ -1, & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

b) Flujo de cizallamiento simple (perfil lineal):

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 1, & \text{si } y > 1 \\ y, & \text{si } -1 < y < 1 \\ -1, & \text{si } y < -1 \end{cases}$$

c) Chorro triangular sumergido:

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 0, & \text{si } y > 1 \\ 1 - y, & \text{si } 0 < y < 1 \\ 1 + y, & \text{si } -1 < y < 0 \\ 0, & \text{si } y < -1 \end{cases}$$

Problema 4. Inestabilidad de Jeans

Considere un fluido compresible isotérmico unidimensional (todas las magnitudes dependen, por ejemplo, solamente de la dirección x), con ecuación de estado

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c_s^2$$

donde c_s es la velocidad del sonido.

(i) Escriba la ecuación de continuidad para este gas.

(ii) Considere el potencial autogravitatorio por unidad de masa Φ tal que

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

con G la constante universal gravitatoria, y escriba la ecuación de Euler para el gas.

(iii) Verifique que un estado de reposo del gas con densidad uniforme ρ_0 es solución de las ecuaciones.

(iv) Realice pequeñas perturbaciones sobre este equilibrio, y linealice el sistema resultante. Suponga que la perturbación es una onda plana

$$\delta\rho = \rho_1 e^{i(kx + \omega t)}$$

y halle la relación de dispersión del sistema.

(v) Muestre que si $k^2 c_s^2 < 4\pi G \rho_0$, ω es imaginaria pura y la perturbación inicial de densidad crece exponencialmente (*inestabilidad de Jeans*). El sistema es inestable cuando la fuerza de presión del gas es menor que la fuerza gravitatoria.