Un comentario acerca de hidrostática

[relacionado al Problema 14 de la Guía 2]

P Cobelli

1 Hidrostática

Según vieron en la clase teórica, una condición necesaria y suficiente para que un fluido se encuentre en equilibrio mecánico es:

$$\boldsymbol{\nabla} p = \rho \boldsymbol{f}, \tag{1}$$

siendo $\boldsymbol{f}$ un campo de fuerzas externo aplicado sobre las partículas de fluido.

De esta expresión observamos un hecho importante: no cualquier distribución de densidades $\rho(\boldsymbol{r})$ podrá existir en equilibrio, dado que $\rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ no será necesariamente un gradiente.

Si la(s) fuerza(s) actuante(s) resulta(n) derivada(s) de un potencial, $\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$, entonces tomando el rotor de la ec. (1), obtenemos

$$\boldsymbol{\nabla}\rho \times \boldsymbol{\nabla}\phi = 0. \tag{2}$$

Esto significa que los gradientes de ρ y de ϕ son paralelos, y por lo tanto sus superficies de nivel coinciden en el equilibrio.

2 La atmósfera terrestre y el equilibrio hidrostático

Un ejemplo en el que la fuerza se deriva de un potencial es el caso de la fuerza gravitatorio, con $\phi(\boldsymbol{r}) = gz$ (en, claro está, un sistema de coordenadas cartesiano con el eje $\hat{z}$ perpendicular al plano del suelo; y siendo g la aceleración de la gravedad). En este caso la ec. (1) adopta la forma sencilla:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \tag{3}$$

Si el fluido sometido a dicho campo de fuerza puede considerarse incompresible, tenemos como solución a la última ecuación diferencial,

$$p(z) = p(0) - \rho g z. \tag{4}$$

En el caso de una masa de gas ideal a temperatura homogénea, de ecuación de estado $p = \rho T/m$, se obtiene:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pgm}{T} \qquad \rightarrow \qquad p(z) = p(0)\exp(-mgz/T). \tag{5}$$

Para el aire a 0° C, $T/mg \approx 8$ km. La atmósfera terrestre no se describe ni por una ley lineal ni exponencial, debido a que la temperatura es, en general, inhomogénea. Asumiendo un decaimiento lineal de la temperatura con la altura, $T(z) = T_0 - \alpha z$, se obtiene una mejor aproximación:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{pmg}{T_0 - \alpha z} \qquad \rightarrow \qquad p(z) = p(0)\left[1 - \alpha z/T_0\right]^{mg/\alpha}, \tag{6}$$

expresión que resulta válida no demasiado lejos de la superficie, con $\alpha \approx 6.5°$ C/km.

3 Un poco más

En un campo gravitatorio (localmente) homogéneo, la densidad dependerá unicamente de la coordenada vertical si ha de haber equilibrio mecánico. Asimismo, y de acuerdo a $dp/dz = -\rho g$, la presión sólo podrá depender de la coordenada z. La presión y la densidad determinan la temperatura, que debe ser también independiente de las coordenadas horizontales. Diferentes temperaturas a una misma altura necesariamente producirán movimiento del fluido, que es la razón por la cual el viento sopla en la atmósfera y las corrientes fluyen en el océano. Otra fuente de flujo atmosférico es la llamada 'convección térmica' debida a un gradiente vertical de termperatura negativo.

En esta sección quería comentarles justamente cómo derivar un criterio de estabilidad para un fluido con un perfil de temperaturas $T(z)$ sometido a un campo gravitatorio $\phi(\boldsymbol{r}) = gz$.

Si un elemento de fluido se desplaza adiabáticamente hacia arriba desde una altura z en una cantidad infinitesimal dz, mantendrá su entropía $s(z)$ pero cambiará su presión a $p' = p(z + dz)$, con lo cuál su densidad será ahora $\rho(s, p')$. Para que haya estabilidad ante un tal desplazamiento, la densidad del elemento desplazado debe superar a la de aquel que estaba en su lugar a la altura $z + dz$, que tiene la misma presión pero diferente entropía: $s' = s(z + dz)$. Entonces la condición de estabilidad es simplemente:

$$\rho(p', s) > \rho(p', s') \rightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz} < 0. \tag{7}$$

Ahora bien, la entropía usualmente se incrementa en una expansión, i.e., $(\partial\rho/\partial s)_p < 0$, y para obtener estabilidad, deberemos pedir

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T}\frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{g}{V} > 0, \tag{8}$$

donde usamos el volumen específico $V = 1/\rho$. Para un gas ideal, el coeficiente de expansión térmica es $(\partial V/\partial T)_p = V/T$; con lo cuál la condición de estabilidad resulta

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g}{c_p}. \tag{9}$$

En el caso de la atmósfera terrestre, $c_p \approx 10^3$ J kg K, y el umbral de convección térmica resulta igual a 10° C/km, que no está muy lejos del gradiente promedio de

6.5°C/km. Esto implica que la atmósfera terrestre resulta a menudo inestable respecto a la convección térmica[1].

Para aquellos que les interese, les dejo un comentario adicional. En general, el cuerpo humano genera convección en el aire a temperatura ambiente. Es más: la convección generada por él es siempre turbulenta. Pueden ver evidencia experimental de este hecho en la película asociada a este documento.

Qué muestra la película?

En este video, se emplea una técnica de visualización de flujos llamada 'Schlieren' para visualizar la convección térmica generada por el cuerpo humano en el aire a temperatura ambiente. El patrón observado se denomina en la literatura '*turbulent plume*'. El aire en las proximidades del cuerpo resulta calentado, lo que causa su ascenso y, por ende, la transferencia de calor al medio circundante. El hecho de que el movimiento es turbulento redunda en una transferencia de calor más eficiente. En la última parte del video la persona exhala aire en repetidas oportunidades, lo que resulta visible como un chorro turbulento en la imagen schlieren.

[1] La temperatura decae con la altura solo en la tropósfera, es decir, hasta −50° C a una altura de entre 10 y 12 km de la superficie. A partir de esa altura, la temperatura crece en la estratósfera hasta alcanzar los 0° C a una altitud de 50 km.