

# ESTRUCTURA DE MATERIA 1

CURSO DE VERANO 2012

## PRÁCTICA 2 CINEMÁTICA E HIDROSTÁTICA

---

### Problema 1. DESCRIPCIONES EULERIANA Y LAGRANGIANA

Se tiene un campo de velocidades que escrito en variables eulerianas es:

$$v_x = v_y = 0, \quad v_z = f(z),$$

para  $t \geq 0$  y  $z \geq 0$ . Encuentre la descripción lagrangiana de este movimiento.

### Problema 2.

Considere la temperatura en un túnel dada por

$$T = T_0 - \alpha e^{-x/L} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right),$$

donde  $T_0$ ,  $\alpha$ ,  $L$  y  $\tau$  son constantes positivas. Una partícula se mueve en el túnel con velocidad constante  $U$ .

- (I) Halle la variación de la temperatura por unidad de tiempo que experimenta la partícula bajo una descripción euleriana. Grafique la temperatura para instantes próximos e interprete geoméricamente las componentes de la derivada total.
- (II) Repita el punto (I) para una descripción lagrangiana.

¿Coinciden las dos descripciones realizadas?

### Problema 3. TRAYECTORIAS, LÍNEAS DE CORRIENTE Y LÍNEAS DE TRAZAS

Halle las trayectorias, las líneas de corriente y las trazas de una partícula ubicada en  $(x_0, y_0)$  a  $t = 0$ , para los siguientes campos de velocidades:

- (I) Una corriente uniforme  $\mathbf{u}(x, t) = U\hat{x}$ .
- (II) Una fuente lineal de caudal constante  $\mathbf{u}(r, \theta) = \frac{Q}{2\pi r}\hat{r}$ .
- (III) Un torbellino con circulación constante  $\mathbf{u}(r, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\hat{\theta}$ .
- (IV) Una fuente lineal de caudal constante superpuesta a una corriente uniforme cuya velocidad  $U$  aumenta linealmente con el tiempo.
- (V) Una corriente uniforme constante superpuesta a otra corriente uniforme ortogonal a la primera. La velocidad  $U'$  de la segunda corriente está modulada en forma armónica en el tiempo con período  $\tau$ .

**Problema 4.**

Determine las líneas de corriente, las trayectorias y las líneas de traza correspondientes al campo de velocidades bidimensional

$$v_x(x, y, t) = \frac{\alpha x}{1 + \beta t}, \quad v_y(x, y, t) = c,$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $c$  son constantes con las dimensiones apropiadas. Grafique las distintas líneas en dos casos distintos:

(I)  $\alpha = \beta$ ,

(II)  $\alpha = 2\beta$ .

**Problema 5.**

Una esfera de radio  $R_0$  en  $t = 0$  se expande para  $t > 0$  de acuerdo a la ley

$$R = R(t), \quad R(0) = R_0.$$

Encuentre dicha ley sabiendo que para  $t > 0$  y  $r > R(t)$ , la velocidad de las partículas de fluido es  $v_r(r) = v_0 R_0^2 / r^2$ .

**Problema 6. VECTOR ‘REMOLINO’**

Muestre que para un fluido rotante con velocidad angular  $\Omega$ , la vorticidad es  $\omega = 2\Omega$ .

**Problema 7. CÁLCULO DE LA VORTICIDAD**

Calcule la vorticidad de los siguientes campos de velocidades:

(I)  $v_\theta = v_0(1 - rt/\alpha)$ ,

(II)  $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ ,

(III)  $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[ 1 - e^{-r^2/(4\nu t)} \right]$ ,

(IV)  $v_x = v_0 y / L$ .

**Problema 8.**

Utilizando los teoremas de Gauss o de Stokes según corresponda, determine:

- (I) El campo de velocidades con simetría esférica, cuya divergencia es constante.
- (II) El campo de velocidades con simetría cilíndrica, con sólo componente azimutal, que verifica que su rotor es un vector constante en la dirección  $\hat{z}$ .
- (III) Idem (b) pero ahora tal que el flujo de su rotor, a través de cualquier superficie abierta que se apoya sobre el plano  $(x, y)$  y contiene al origen, es el mismo.

**Problema 9. TAQUÍMETRO HIDROSTÁTICO**

Un recipiente cilíndrico de eje vertical, de radio  $R$  y altura  $2H$ , inicialmente lleno hasta la mitad con un líquido incompresible, gira alrededor de su eje con velocidad angular uniforme  $\Omega$ .

- (I) ¿Cuál es la forma de la superficie libre del líquido?
- (II) ¿Para qué velocidad angular de rotación la superficie libre empieza a tocar el fondo?
- (III) ¿Para qué velocidad angular de rotación el agua empieza a desbordar, si  $R = 5$  cm,  $H = 7,5$  cm,  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>? Calcule el valor numérico de la frecuencia hallada.
- (IV) Si el recipiente tiene las dimensiones dadas en (c), grafique la distribución de presiones sobre las paredes y sobre el fondo en los casos:
  - (I) En reposo;
  - (II) Cuando el recipiente rota con frecuencia  $\nu = 90$  rpm.
- (v) Piense un método que le permita medir velocidades angulares con el taquímetro.

**Problema 10. MODELO DE CICLÓN**

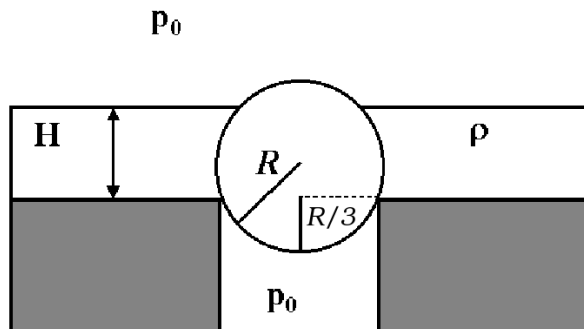
Considere el campo de velocidades de un fluido consistente en un núcleo cilíndrico muy alargado de base circular con radio  $a$ , que rota rígidamente sobre su eje principal con velocidad angular constante  $\Omega$ . Fuera del núcleo, el campo de velocidades es también azimutal, pero con vorticidad nula. El campo de velocidades es continuo en  $r = a$ , donde  $r$  es la coordenada radial cilíndrica con el eje  $z$  coincidente con el eje del núcleo.

- (I) Determine el campo de velocidades para todo valor de  $r$ .
- (II) Determine la distribución de la presión y de la vorticidad para todo  $r$ , en función de la presión muy lejos del eje  $p_\infty$ . Encuentre qué condición debe satisfacer  $\Omega$  respecto del valor de la presión  $p_\infty$ .

**Problema 11. TAPÓN DE PILETA**

Una esfera sólida de densidad  $\sigma$  uniforme está apoyada sobre el desagüe de una piletta. Un líquido incompresible de densidad  $\rho$ , en equilibrio hidrostático con el ambiente, alcanza una altura  $H$  desde el fondo de la piletta. Analice bajo qué condiciones la esfera obtura el desagüe. Para ello:

- (I) Calcule la fuerza de empuje debida al líquido como función de  $H$  (tenga en cuenta que el líquido puede tapar o no totalmente a la esfera).
- (II) Grafique el empuje como función de  $H$  e interprete cualitativamente.
- (III) Si  $\sigma = \alpha\rho$ , verifique que el valor mínimo de  $\alpha$  para el cual se obtiene obturación para todo  $H$  es  $\alpha = 8/27$ .

**Problema 12.** PLACA PLANA EN EL SENO DE UN FLUIDO

Calcule la fuerza total (y el punto de aplicación de la misma) que sufre una de las caras de una superficie plana  $S$ , de forma arbitraria, cuyo plano forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, y que se encuentra sumergida completamente en un líquido estático de densidad  $\rho$ . Sugerencia: utilice un sistema de coordenadas con origen en  $S$  y con uno de sus ejes perpendicular a dicha superficie.

**Problema 13.**

El comportamiento del agua a una dada temperatura se modela bien por la relación  $p = K(\rho - \rho_0)/\rho_0$ , donde  $\rho_0$  es la densidad en ausencia de presión y  $K$  una constante.

- (I) Si el agua se encuentra en reposo bajo la acción de la fuerza por unidad de masa y de volumen  $\mathbf{F} = g\hat{z}$ , determine la distribución de presión y de densidad del agua en función de la profundidad sabiendo que en  $z = 0$  es  $\rho = \rho_0$ .
- (II) Repita suponiendo ahora al agua estrictamente incompresible ( $K \rightarrow \infty$ ). Calcule el error que se comete al suponer al agua incompresible al determinar la densidad y la presión de la misma a una profundidad de 1000 m, ( $K = 2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho_0 = 1000 \text{ Kg/m}^3$ ) (desprecie la presión en la superficie).
- (III) Considere ahora un gas ideal con ecuación de estado  $p = \rho RT/m$ , con  $R$  la constante universal de los gases y  $m$  la masa molecular media. Muestre que si el gas está en reposo en el campo de fuerzas  $\mathbf{F} = -g\hat{z}$ , la presión a una altura  $z$  está dada por

$$p = p_0 \exp \left\{ -\frac{mg}{R} \int_0^z \frac{dz'}{T(z')} \right\}.$$

- (IV) Muestre que si  $T$  depende de  $x$ ,  $y$  y  $z$  no existe solución hidrostática posible y debe haber por lo tanto movimiento del gas.

**Problema 14.** MODELO SIMPLIFICADO DE LA ATMÓSFERA TERRESTRE

Halle y grafique la presión, la densidad y la temperatura de la atmósfera como función de la altura  $z$  sobre la superficie, si se sabe que sobre ella dichas magnitudes toman los valores  $p_0$ ,  $\rho_0$  y  $T_0$  respectivamente. Suponga que la Tierra es plana, la gravedad es constante y que la atmósfera está en reposo. Considere al aire como un gas ideal y

que la presión y la densidad se relacionan mediante la relación  $p\rho^{-\gamma} = cte.$  (atmósfera adiabática).

**Problema 15.** ESTRELLA AUTOGRAVITANTE

Obtener una expresión para la presión de una estrella esférica autogravitante, en los siguientes casos:

- (I) Densidad de masa uniforme ( $\rho = \rho_0$ ). Verifique que la estrella tiene un radio finito (¿Cuál es la condición para que esto ocurra?).
- (II) El gas satisface la ecuación de estado  $p = C\rho^{6/5}$ . Observe que en esta situación la estrella se extiende indefinidamente, pero su masa es finita.

Utilice que el potencial autogravitatorio  $\phi$  satisface  $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$  con  $G$  la constante de gravitación, de modo que si  $-\rho\nabla\phi = \nabla p$ , la ecuación a resolver será  $\nabla \cdot \nabla(p/\rho) = -4\pi G\rho$ .