Astrofísica

2° cuatrimestre de 2011

Práctica 9: Galaxias.[1]

1. Considere un sistema estelar con un potencial gravitatorio $\Phi(r)$ y una densidad $\rho(r)$. Se define el potencial relativo $\Psi = -\Phi + \Phi_0$, donde Φ_0 es una constante, y la energía relativa de una estrella como $\mathcal{E} = -E + \Phi_0$, donde E es la energía de la misma. Si la función de distribución de la energía relativa es $f(\mathcal{E}) = k\mathcal{E}^{n-3/2}$ para $\mathcal{E} > 0$, donde k es una constante,

   (a) muestre que la densidad viene dada por

   $$\rho = \frac{(2\pi)^{3/2}\left(n - \frac{3}{2}\right)!k}{n!}\Psi^n. \tag{1}$$

   (b) Muestre que el potencial relativo satisface la ecuación de Lane–Emden. Estos modelos estelares se llaman politrópicos.

2. Demuestre que es posible obtener la velocidad del Sol respecto al Estándar Local de Reposo (LSR) midiendo las velocidades relativas al Sol de las estrellas cercanas. Explique en detalle cómo realizaría esta medición.

3. Considere la Galaxia como un disco en rotación diferencial, es decir con una velocidad angular Ω dependiente de la distancia R al centro del disco. Muestre que las componentes radial y tangencial de la velocidad media de las estrellas cercanas (relativa al LSR solar) cumplen $\langle v_R \rangle = rA\sin(2l)$ y $\langle v_T \rangle = \mp r(B + A\cos(2l))$, donde r es la distancia de las estrellas al Sol, l la longitud galáctica, y A y B son las constantes de Oort,

   $$A = \frac{1}{2}\left(\Omega - \frac{d(\Omega R)}{dR}\right)(R = R_\odot), \tag{2}$$

   y

   $$B = -\frac{1}{2}\left(\Omega + \frac{d(\Omega R)}{dR}\right)(R = R_\odot). \tag{3}$$

   Discuta el uso de observaciones de movimientos propios y velocidades radiales para investigar la dinámica de la Galaxia en la vecindad del Sol.

4. A partir de las ecuaciones de movimiento en un potencial central Φ:

   (a) Muestre que la coordenada radial r de una partícula con momento angular L cumple

   $$\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{d\Phi_{\text{eff}}}{dr} = 0, \tag{4}$$

   donde $\Phi_{\text{eff}} = \Phi + L^2/2r^2$ y t es el tiempo.

   (b) Si la órbita de una estrella viene dada por $r(t) = r_0 + x(t)$, siendo $|x| \ll r_0$ y r_0 el radio de la órbita circular, muestre que a primer orden se satisface

   $$\frac{d^2x}{dt^2} + \kappa^2 x = 0, \tag{5}$$

   e identifique κ, la llamada *frecuencia epicíclica*, con alguna derivada del potencial efectivo. Halle $r(t)$.

[1] Los ejercicios indicados con (*) son para entregar. Fecha límite: 30/11/2011.

(c) Muestre que la frecuencia epicíclica viene dada por

$$\kappa^2 = 4\Omega^2(r_0) + r_0 \frac{d\Omega^2}{dr}(r_0), \tag{6}$$

donde Ω es la frecuencia angular de rotación de la galaxia. Calcule cuánto vale κ para el potencial generado por una masa puntual y una distribución de masa con densidad constante. Discuta el rango de valores posibles de κ.

(d) Muestre que del movimiento en la dirección tangencial es, a primer orden,

$$\theta(t) = \theta_0 + \Omega(r_0)t - 2\frac{\Omega(r_0)X}{r_0\kappa}\sin(\kappa t + \alpha), \tag{7}$$

donde X es la amplitud de la oscilación radial, y α y θ_0 son cosntantes de integración.

(e) Muestre que, en el sistema de coordenadas de un cuerpo que gira en la órbita circular de radio r_0, la trayectoria es una elipse (*epiciclo*).

5. (*) Considere que los brazos espirales de una galaxia están compuestos de materia (estrellas y material interestelar) que permanece en ellos. La forma de los brazos viene dada por una función $\phi(R)$, donde R y ϕ son las coordenadas cilíndricas de los elementos de fluido que componen el brazo.

   (a) Muestre que si $\omega(R)$ es la velocidad angular de rotación del disco a un radio R, la inclinación i del brazo respecto a la dirección radial cumple $\tan i = Rtd\omega/dR$, donde t es el tiempo.

   (b) Muestre que si $d\omega/dR \neq 0$, $i \to \pi/2$ para $t \to \infty$. Discuta por qué esto se denomina *problema del enrollamiento*.

   (c) Muestre que para una espiral fuertemente enrollada, la separación radial entre brazos es $\Delta R = 2\pi R/\tan i$.

   (d) Considerando que la curva de rotación de la Vía Láctea es plana ($\omega R = 220$ km s^{-1}), que la distancia del Sol al centro es $R = 8$ kpc, y que la edad de la Galaxia es $t \sim 10^{10}$ yr, calcule i y ΔR en la vecindad del Sol. ¿Qué conclusiones obtiene?

6. (*) Estudios de la emisión del HI en galaxias espirales muestran que, en la mayoría de los discos, la velocidad de la órbita circular v_c no depende de la distancia al centro R para $R > R_{\rm opt}$, donde $R_{\rm opt}$ es el radio del disco en el rango óptico.

   (a) Discuta las implicaciones físicas de este resultado observacional. En particular, exprese claramente cuál es el concepto de *materia oscura* al que conducen.

   (b) Si el halo de materia oscura de una galaxia espiral se considera esférico, calcule la variación de la masa $M(R)$ interior al radio R, como función de R.