

Astrofísica

2º cuatrimestre de 2011

Práctica 8: Cosmología.¹

1. Considere un Universo infinito, homogéneo, isótropo y eterno. La densidad numérica de galaxias en este Universo es n , y la función de luminosidad para las galaxias es $\phi(L)$, de modo tal $\phi(L)dL$ es la probabilidad de encontrar una galaxia con luminosidad entre L y $L + dL$, y $\int_0^\infty \phi(L)dL = 1$.
 - (a) Muestre que la distribución $\varphi(q)$ del flujo de radiación observado de una galaxia (q) es proporcional a $q^{-3/2}$, independientemente de la forma de $\phi(L)$. Discuta cómo usaría un histograma de flujos de galaxias (número de galaxias observadas con un flujo dado en función del flujo) para estimar una posible variación de n con la distancia a la Tierra.
 - (b) Muestre que el flujo total de radiación recibido en la Tierra es infinito, en clara contradicción con la simple observación de que el cielo es oscuro (*paradoja de Olbers*). ¿Qué posibles soluciones encuentra a esta paradoja?
2. Considere un Universo compuesto por un fluido homogéneo e isótropo de densidad ρ y velocidad \vec{v} , que evoluciona en el tiempo t ($t = 0$ es el instante actual).
 - (a) (*) A partir de la ecuación de continuidad, obtenga la *ley de Hubble*, $\vec{v} = H(t)\vec{r}$, donde \vec{r} es el vector posición y H es una función del tiempo ($H_0 = H(0)$ es la *constante de Hubble*). Discuta por qué esto implica que el Universo se está expandiendo, cuál es el origen de coordenadas, y de qué modo puede verificarse observacionalmente esta ley.
 - (b) Se define $R(t)$ mediante $H(t) = (1/R)dR/dt$. Calcule, a partir de la ecuación de continuidad, la relación entre R y ρ . Discuta cuál es el significado físico de R y por qué se suele denominar *radio del Universo*. ¿Implica esto que el Universo sea finito y esférico?
 - (c) A partir de la ecuación de Euler y de la ecuación de Poisson para el potencial gravitatorio, obtenga la ecuación de movimiento para R ,

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4\pi}{3} \frac{G\rho_0 R_0^3}{R^2}, \quad (1)$$

donde G es la constante de gravitación universal, y ρ_0 y R_0 son la densidad y el radio actuales del Universo, respectivamente.

- (d) Integre una vez la ecuación anterior para obtener

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - k, \quad (2)$$

donde k es una constante que puede valer 0, 1, o -1 . Discuta por qué no se consideran otros valores de k .

- (e) Muestre que para $k = -1$ y 0 el Universo se expande indefinidamente, mientras que para $k = 1$ alcanza un radio máximo $R_m = 8\pi G\rho_0 R_0^3/3$ y luego se contrae.
- (f) (*) Definiendo el parámetro de densidad $\Omega = 8\pi G\rho/3H^2$, muestre que $k = 0, 1$ y -1 implican respectivamente $\Omega_0 = 1, > 1$ y < 1 . Discuta el origen de la relación entre la densidad y la expansión o contracción del Universo.
- (g) El fluido del Universo contiene tanto materia, que ejerce una presión p_m , como radiación, que ejerce una presión p_r . Use la ecuación de transporte de calor para mostrar que si $p_r \ll p_m$, la temperatura del fluido es $T \propto R^{-2}$, mientras que si $p_r \gg p_m$, $T \propto R^{-1}$.

¹Los ejercicios indicados con (*) son para entregar. Fecha límite: 30/11/2011.