Astrofísica

2° cuatrimestre de 2011

Práctica 5: Atmósferas Estelares.[1]

1. Considere un gas de fotones con una función de distribución monocromática $f_\nu(\vec{r}, \vec{p})$, siendo $\vec{r}$ y $\vec{p}$ la posición y momento de los fotones, y ν su frecuencia.
   (a) Exprese, en términos de f_ν, la densidad monocromática de fotones n_ν, la densidad de energía monocromática ϵ_ν, la intensidad específica monocromática I_ν, la intensidad media monocromática J_ν, y el flujo monocromático $\vec{q}_\nu$.
   (b) Obtenga las expresiones que determinan las correspondientes magnitudes integradas en todo el espectro electromagnético.
   (c) Exprese el tensor de presión del gas de fotones $\mathcal{P}_\nu$, y la presión de radiación (correspondiente a la presión hidrostática en un fluido), $p_\nu \equiv \mathrm{Tr}(\mathcal{P}_\nu)/3$, en términos de f_ν.
   (d) Halle la ecuación que relaciona la densidad de energía del gas de fotones con la presión.

2. Halle la relación entre I_ν, J_ν, $\vec{q}_\nu$ y p_ν para el caso en que la radiación es isótropa.

3. Desde el punto de vista observacional, un objeto se dice puntual si su tamaño lineal R es tal que $R/r < \alpha_{\min}$, donde r es la distancia del objeto a la Tierra y $\alpha_{\min}$ la resolución angular del detector utilizado. En caso contrario, el objeto se dice extenso. Considere el caso en que $r \gg R$.
   (a) Muestre que para un objeto extenso, la intensidad $I_\nu(r)$ medida en la Tierra es igual a la intensidad $I_\nu(R)$ en la superficie del mismo, y por lo tanto es independiente de r.
   (b) Muestre que tanto para objetos puntuales como extensos $q_\nu(r) \equiv |\vec{q}_\nu(r)| \propto r^{-2}$.

4. Considere una estrella de radio R ubicada a una distancia $r \gg R$ de la Tierra. Su superficie es atravesada por radiación que se propaga hacia afuera ($0 < \hat{u} \cdot \hat{r} \equiv \cos\theta$, siendo $\hat{u}$ la dirección de propagación de los fotones y $\hat{r}$ el versor radial).
   (a) Use argumentos de simetría para mostrar que en la superficie I_ν sólo depende de θ.
   (b) Muestre que el flujo de radiación total recibido en la Tierra es $q_\nu(r)\hat{r} = q_\nu(R)(R/r)^2\hat{r}$.
   (c) Muestre que la luminosidad monocromática de la estrella es $L_\nu = 4\pi r^2 q_\nu(r) = 4\pi R^2 q_\nu(R)$.
   (d) Si en la superficie de la estrella la intensidad es $I_\nu(\theta) = I_\nu$ para $\theta < \pi/2$ y nula en otro caso, calcule $\vec{q}_\nu$, J_ν, p_ν y L_ν en función de I_ν.
   (e) Si además se supone $I_\nu = B_\nu(T)$, donde $B_\nu(T)$ es la función de Planck a una temperatura T, halle L_ν, L y p_ν. ¿Qué problemas presenta esta hipótesis?

5. La tabla siguiente contiene las magnitudes aparentes de una estrella en algunas bandas ópticas e infrarrojas, y los correspondientes flujos monocromáticos de la estrella Vega medidos en la Tierra ($m_{\mathrm{Vega}} \equiv 0$ para todas las bandas).

Banda	λ (μm)	$q_{\lambda,\mathrm{Vega}}$ (nW m^{-2} μm^{-1})	m_* (mag)
B	0.440	64.0	6.24 ± 0.19
V	0.556	37.5	6.39 ± 0.15
R	0.710	17.5	7.21 ± 0.10
J	1.215	3.31	6.94 ± 0.13
H	1.654	1.15	6.93 ± 0.09
K	2.157	0.43	7.31 ± 0.06

[1] Los ejercicios indicados con (*) son para entregar. Fecha límite: 26/10/2011.

(a) Calcule el flujo q_ν de la estrella medido en la Tierra, para cada una de las bandas, y grafíquelo en función de la frecuencia.

(b) Si la magnitud absoluta de la estrella en la banda B es $M_B = -6.3$, calcule la luminosidad L_ν de la estrella en cada banda y grafíquela en función de la frecuencia.

(c) Ajustando una función de Planck a L_ν, determine la temperatura efectiva de esta estrella y su radio. ¿Qué puede decir de la calidad del ajuste?

(d) Suponiendo que el ajuste representa bien la emisión de la estrella *en todo el espectro*, calcule la luminosidad total de la estrella L. A partir de ella y sabiendo que $M_{\mathrm{bol},\odot} = 4.83$, calcule su magnitud bolométrica absoluta.

6. (*) Suponiendo que la sensibilidad de los filtros B y V es una delta de Dirac, halle la relación entre el índice de color $B - V$ y la temperatura de un cuerpo negro. Muestre además que, si la radiación no es absorbida o dispersada por el medio entre la estrella y la Tierra, el índice de color es independiente de la distancia a la estrella.

7. Considere un elemento de fluido compuesto por hidrógeno ionizado (llamado HII en astrofísica —HI es el hidrógeno neutro—) en la superficie de una estrella esférica de masa M, radio R y luminosidad L, en la cual supondremos que los fotones solamente se propagan en forma radial.

(a) Muestre que la fuerza por unidad de volumen ejercida por la radiación sobre dicho elemento es

$$\vec{F}_{\mathrm{rad}} = \sigma \frac{L}{12\pi c R^2} \hat{r}, \tag{1}$$

donde c la velocidad de la luz y σ la sección eficaz por unidad de volumen para la interacción de la radiación con el fluido.

(b) ¿Cuál es la dependencia del cociente F_{rad}/g con R, para L constante? (g es la aceleración de la gravedad en la superficie de la estrella).

(c) Suponiendo que F_{rad} se debe solamente a la dispersión de la radiación por los electrones (scattering Thomson), la cual tiene una sección eficaz por electrón σ_{T}, muestre que

$$\frac{g}{F_{\mathrm{rad}}} = \frac{4\pi G M m_{\mathrm{p}} c}{\sigma_{\mathrm{T}} L \rho_{\mathrm{p}}}, \tag{2}$$

donde G es la constante de gravitación universal, ρ_{p} la densidad en masa de protones y m_{p} la masa un protón.

(d) Calcule la máxima luminosidad que puede tener la estrella manteniendo un equilibrio hidrostático (llamada *límite de Eddington*), en función de M. Si para las estrellas de la secuencia principal del diagrama HR, $L \propto M^{3.5}$, calcule la masa límite que puede tener una estrella en equilibrio hidrostático.

8. (*) En equilibrio termodinámico la distribución de fotones es homogénea, isótropa y estacionaria.

(a) A partir de la ecuación de transporte, muestre que en equilibrio termodinámico $e_\nu = k_\nu I_\nu$, donde e_ν es la emisividad y k_ν el coeficiente de absorción.

(b) Obtenga I_ν y f_ν usando la ley de Kirchoff, $e_\nu = k_\nu B_\nu$, donde

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\mathrm{e}^{h\nu/k_{\mathrm{B}}T} - 1} \tag{3}$$

es la función de Planck, ν es la frecuencia, c la velocidad de la luz, h la constante de Planck, k_{B} la constante de Boltzmann y T la temperatura.

(c) Calcule n_ν, ϵ_ν, J_ν, $\vec{q}_\nu$, $\mathcal{P}_\nu$ y p_ν para este sistema. Discuta el significado físico de sus resultados.

9. Considere la solución a la ecuación de transporte para un gas de fotones en LTE, con emisividad planckiana y en la aproximación de difusión,

$$I_\nu = B_\nu - \frac{\hat{u} \cdot \vec{\nabla} B_\nu}{\kappa_\nu \rho}, \tag{4}$$

donde B_ν es la función de Planck, ρ la densidad y κ la opacidad. Calcule I_ν, J_ν, q_ν, $\mathcal{P}_\nu$ y p_ν, y compare con el resultado del ejercicio anterior.

10. Considere una atmósfera estacionaria, plana y estratificada, en la que z es la dirección vertical.

    (a) (*) Muestre que la ecuación de transporte puede escribirse como

    $$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = I_\nu - S_\nu, \tag{5}$$

    donde $\mu = \cos\theta$ y $d\tau_\nu = -\kappa_\nu \rho dz$. Interprete físicamente el significado de τ_ν.

    (b) (*) Muestre que $\exp(-\tau_\nu/\mu)$ es un factor integrante de la ecuación, halle su solución formal y el valor de la intensidad emergente, $I_\nu(z=\infty) = I_\nu(\tau_\nu = 0)$. Interprete el significado físico de esta última.

    (c) (*) Suponiendo que $S_\nu = a\tau_\nu + b$ $(a, b > 0)$, muestre que la intensidad emergente es $S_\nu(\tau_\nu = \mu) = a\mu + b$ (relación de *Eddington–Barbier*). Utilice este resultado para explicar el oscurecimiento del limbo solar.

    (d) Suponga que la fotosfera solar se encuentra en LTE con $dT/dz < 0$, y que κ_ν tiene un máximo en $\nu = \nu_0$. A partir del resultado del punto anterior para $\mu = 1$, explique por qué se observa una línea de absorción centrada en ν_0 en el espectro solar.

    (e) Si ahora κ_ν tiene un máximo en ν_0 y $\tau_\nu = 1$ ocurre en la cromosfera solar, donde $dT/dz > 0$, ¿qué debería observar alrededor de la frecuencia ν_0?

11. Considere la propagación de la luz proveniente de una estrella en la atmósfera terrestre. Muestre que la magnitud aparente de la estrella medida en la superficie terrestre es $m_\nu = m_{\nu,0} + K_\nu \sec\theta$, donde $m_{\nu,0}$ es la magnitud aparente fuera de la atmósfera, K_ν una constante y θ la distancia cenital de la estrella. ¿Cómo usaría este resultado para medir $m_{\nu,0}$ desde la superficie terrestre?

12. Considere una atmósfera gris $(k_\nu = k)$ en LTE y equilibrio radiativo, con S_ν isótropa. Muestre que valen

    $$p = \frac{\sigma T_\mathrm{e}^4}{c}\left(\tau + \frac{2}{3}\right), \tag{6}$$

    $$J = \frac{3\sigma T_\mathrm{e}^4}{4\pi c}\left(\tau + \frac{2}{3}\right), \tag{7}$$

    $$T^4 = \frac{3T_\mathrm{e}^4}{4}\left(\tau + \frac{2}{3}\right), \tag{8}$$

    donde T_e es la temperatura efectiva. Discuta el significado de estas expresiones y la naturaleza de la aproximación.

13. La intensidad de una serie de líneas espectrales que corresponden a transiciones desde el nivel s de una especie en estado de ionización i, es proporcional a la población $N_{i,s}$ de ese nivel. Si se consideran solamente dos estados de ionización i e $i+1$ con poblaciones N_i y N_{i+1} para dicha especie,

    $$\frac{N_{i,s}}{N} = \frac{N_{i,s}}{N_i}\frac{1}{1 + N_{i+1}/N_i}, \tag{9}$$

    donde N es la población total de la especie. En equilibrio de excitación y considerando relevantes únicamente las poblaciones de dos niveles s y $s+1$, la ecuación de Boltzmann permite evaluar la primera fracción,

    $$\frac{N_{i,s}}{N_i} = \left(1 + \frac{N_{i,s+1}}{N_{i,s}}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{g_{s+1}}{g_s}\exp\left(-\frac{E_{s+1} - E_s}{kT}\right)\right)^{-1}, \tag{10}$$

donde T es la temperatura, k la constante de Boltzmann, y g_s y g_{s+1} las degeneraciones de los niveles. En equilibrio de ionización, la ecuación de Saha permite evaluar la segunda fracción,

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{A(kT)^{3/2}}{N_e} \exp\left(-\frac{\chi_i}{kT}\right), \tag{11}$$

donde A es una constante, N_e la densidad de electrones y χ_i el potencial de ionización del estado i.

(a) Para el hidrógeno existen dos estados de ionización posibles, neutro (HI) y simplemente ionizado (HII). Las líneas de la serie de Balmer se forman a partir del primer nivel excitado del estado neutro (nivel 2), siendo $g_1 = 2$, $g_2 = 8$, $E_1 = -13.6$ eV, $E_2 = -3.4$ eV. La constante de la ecuación de Saha es $A = 7.89 \times 10^{25}$, y el potencial de ionización es $\chi_I = -E_1$. Grafique, en función de la temperatura y para el rango entre 3000 y 30000 K, los cocientes $N_{\mathrm{I},2}/N_{\mathrm{I}}$ y $N_{\mathrm{II}}/N_{\mathrm{I}}$, y la fracción $N_{\mathrm{I},2}/N$. Interprete los gráficos y discuta cómo espera que sea la dependencia de la intensidad de las líneas de la serie de Balmer con la temperatura.

(b) Realice los mismos gráficos para el calcio, considerando las especies neutra (CaI) y simplemente ionizada (CaII), y las líneas H y K, que provienen de transiciones desde el nivel fundamental del CaII. En este caso $E_2 - E_1 = 3.12$ eV, $g_1 = 2$, $g_2 = 4$, $A = 2.75 \times 10^{26}$ y $\chi_{\mathrm{I}} = 6.11$ eV. Compare con lo obtenido en el punto anterior.

14. (a) Considere la formación de una línea espectral por desexcitación del estado j de un átomo al estado fundamental. El perfil natural de la línea (probabilidad de transición en función de la frecuencia ν) es la transformada de Fourier de la función de onda φ_j del estado j. Calcule el perfil de línea para $\varphi_j = u_j \exp((-\Gamma/2 + i2\pi\nu_j)t)$, donde Γ es una constante (el resultado se denomina *perfil de Lorentz*).

    (b) Considere un gas a una temperatura T que produce una línea espectral con ancho natural despreciable. Muestre que el perfil de línea debido al movimiento de los átomos (llamado *perfil Doppler*) es gaussiano. Relacione el ancho de la línea con la temperatura del gas.

15. Considere la línea Hα del hidrógeno neutro en absorción ($\lambda = 656.3$ nm), y suponga que tiene un ancho natural despreciable.

    (a) Grafique el perfil que tendría la línea en una estrella cuya atmósfera se encuentra a una temperatura $T = 10^4$ K.

    (b) Si ahora la estrella rota a una velocidad de 300 km s^{-1} en el ecuador, grafique el perfil observado. Suponga que la intensidad del disco estelar es constante y que la inclinación del eje de rotación respecto de la visual es de 90°.